A espiral equiangular

EDUARDO VELOSO

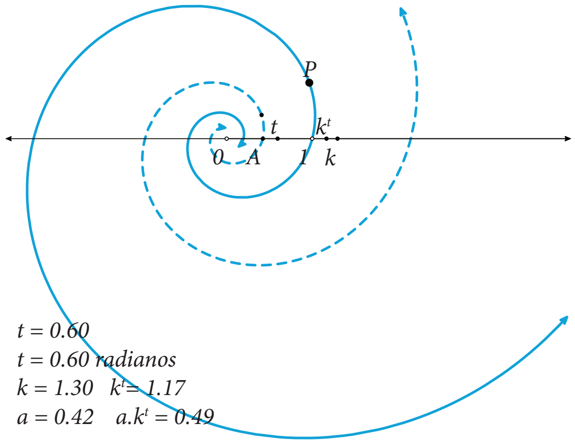

Figura 1

A espiral equiangular

A espiral equiangular, também apelidada de *logarítmica*, foi inventada por René Descartes (1596-1650) em 1638 e intensamente estudada uns anos depois pelo matemático suiço Jakob Bernoulli (1655-1795), que lhe chamava *spira mirabilis*. Deveria fazer parte dos temas de geometria sugeridos na escolaridade obrigatória, dadas as suas numerosas e interessantes propriedades e e a facilidade do seu estudo com um programa de geometria dinâmica.

As espirais serão construídas nestes artigos – e sugerimos que o sejam pelos alunos – com este tipo de *software*, da seguinte forma [1]:

• um parâmetro *t* é construído na recta $\overleftrightarrow{01}$ ou na semi-recta $\overrightarrow{01}$;
• *t* pode ser expresso como um número real (a sua abcissa) ou, se multiplicado por *1 radiano*, como medida de ângulos em radianos;
• a recta *s* é a imagem de $\overleftrightarrow{01}$ pela rotação de centro *0* e ângulo *t* radianos;
• desta forma, quando *t* percorre $\overleftrightarrow{01}$ com movimento uniforme, a semi-recta *s* roda em torno do ponto *0*.

O ponto *P* que vai traçar a espiral é um ponto que se move sobre a recta *s* ao mesmo tempo que esta roda em torno de *0*. A posição de *P* sobre a semi-recta *s* será dada pela sua *distância a 0*, que dependerá do valor da *abcissa de t*.

Recorde o leitor que na *espiral de Arquimedes* o movimento de *P* dependia *linearmente* de *t*, ou seja, era dada uma constante positiva *k* — valor da referida distância para *t=1* — e depois, para qualquer *t*, *a* distância de *P* a 0 seria *k.t*. Ou seja, quando o ângulo da recta *s* com $\overleftrightarrow{01}$ variasse de *1* para *2 radianos*, por exemplo, o valor da distância referida passaria de *k* para *2k*.

No caso da *espiral equiangular*, o que se pretende é que – dito informalmente – o crescimento seja *exponencial* e não *linear*. Ou seja, que *a distância* de *P* ao ponto *0* seja k^t em lugar de *k.t*.

Construamos, então uma espiral equiangular (fig. 1): Seja *k* um número positivo (na figura, *k=1.3*). E seja *t* um parâmetro em $\overleftrightarrow{01}$ (na figura, *t=.60* e *t=.60 rad*). Construamos o ponto *P*:

• temos $k^t = 1.3^{.60} = 1.17$ para *t=.60;*
• marcamos o ponto k^t*=1.17* sobre a semi-recta $\overrightarrow{01}$ (menu *Graph: Plot Value on Axis*);
• efectuamos a rotação (ângulo *.60 rad* e centro *0*) do ponto k^t e obtemos o ponto *P* sobre *s* (não representada na figura) – será o ponto da espiral correspondente a *t=.60*;
• seleccionamos *t* e *P* e traçamos o lugar geométrico de *P* quando *t* percorre a recta $\overleftrightarrow{01}$ (*Menu Construct:Locus*).

Obtemos desta forma a espiral equiangular para o valor de *k=1.3*. Naturalmente, como para *t=0* o valor de k^t é *1*, a espiral passa pelo ponto *1*. Obtemos uma espiral "paralela" (a tracejado, na figura) passando pelo ponto *A* (abcissa *a=0.42* na figura) se, na construção anterior, substituirmos k^t *por* $a.k^t$. Veja, no site de apoio a este artigo, o vídeo *equi_1.mov.*[2]

Donde provém o nome "equiangular"?

O nome *equiangular* refere-se a uma *propriedade característica deste tipo de espiral*. Considere um ponto qualquer da espiral – seja Q – e o ângulo *φ* (fig. 2) entre a semi-recta $0Q_1$ e a semi-recta QQ_2 tangente à espiral no ponto Q. Pode demonstrar-se —recorrendo à análise matemática, o que está fora do âmbito deste artigo e certamente fora do âmbito da matemática na escolaridade obrigatória — que *o ângulo φ é constante para qualquer ponto Q da espiral.*

Como estamos no sec. XXI, temos acesso a programas de geometria dinâmica *— e isso devia acontecer com os alunos da escolaridadebrigatória!*

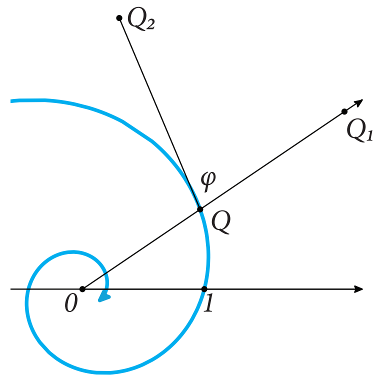

Figura 2

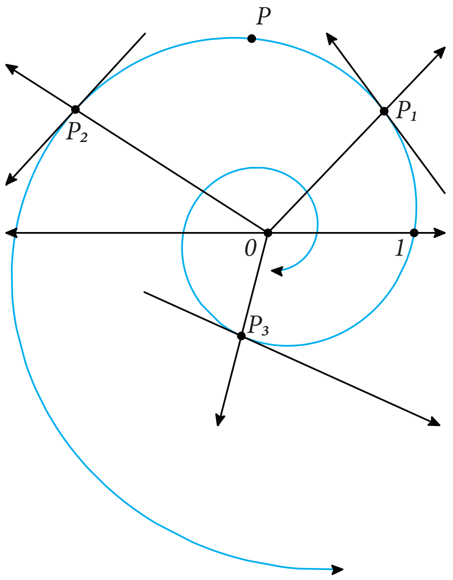

Figura 3

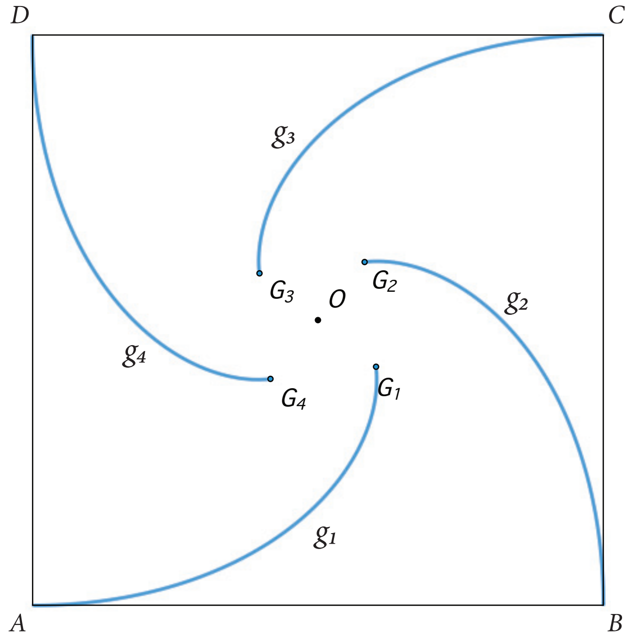

Figura 4

Veremos em seguida como uma simples construção mostra claramente essa propriedade da equiangular.

A demonstração pela análise de que o ângulo φ é constante pode encontrar-se, por exemplo, no livro *Introduction to Geometry* de *Coxeter*[3]. Como o leitor pode concluir, dado o modo como construímos a espiral, se o ângulo é constante, então deve estar directamente relacionado com a constante k escolhida. Na realidade, o que Coxeter demonstra é que

$$\varphi = \arctan(1/\ln k) \quad \text{ou} \quad k = e^{\cot \varphi}$$

Suponhamos então que pretendíamos *mostrar* a constância do referido ângulo numa espiral equiangular em que φ (que designamos por *ângulo de referência* da espiral) é igual a *80°* (equivalente a *1.4 rad*). No *GSP*, procedemos da seguinte forma:

- calculamos o correspondente valor de k (usando a calculadora do *GSP*); $k = e^{\cot 1.4} = e^{(1/\tan 1.4)} = 1.19$;
- traçamos a espiral para $k=1.19$ (como fizemos anteriormente (resultando daí a espiral da fig. 3). Depois escolhemos três pontos quaisquer P_1, P_2 e P_3 sobre a espiral. Unimos *0* com cada um destes pontos e depois, com centros respectivamente em P_1, P_2 e P_3 efectuamos rotações das rectas $0P_1$, $0P_2$ e $0P_3$ (ângulo *1.4 rad*). A fig. 3, embora não demonstre, mostra intuitivamente, com uma grande "força de convicção", que os cálculos de Coxeter estavam correctos...

Veja, no apoio *online* a este artigo, o vídeo *equi_2.mov*. Servindo-se desse video, o professor, como diria Sebastião e Silva, pode "dar ao ensino uma orientação de tal modo natural, que o aluno seja levado a aceitar os factos intuitivamente, e com uma força de convicção semelhante à que nos vem da demonstração rigorosa desses factos."[4]

Dois modos de construir a espiral equiangular

Existem numerosos processos de construir este tipo de espiral, e daí o nome de *espiral maravilhosa* que lhe deu Bernoulli... Iremos apresentar aqui dois exemplos, possíveis de realizar por alunos da escolaridade obrigatória, mediante o uso de um programa de geometria dinâmica.

Exemplo 1. Curvas de perseguição

Imaginemos um quadrado *ABCD* e quatro galgos — G_1, G_2, G_3 e G_4 — colocados respectivamente nos pontos *A*, *B*, *C* e *D* (fig. 4).

Suponhamos que, num dado instante, os quatro galgos começam a perseguir-se mutuamente, correndo todos à mesma velocidade: G_1 persegue G_2, G_2 persegue G_3, G_3 persegue G_4 e G_4 persegue G_1! Podemos pedir ao *Sketchpad* — veja, no apoio *online* a este artigo, o vídeo *equi_3.mov*, para perceber como... — que trace as curvas seguidas pelos galgos até um pouco antes de se encontrarem no centro do quadrado. Cada uma das curvas traçadas pelos galgos — g_1, g_2, g_3 e g_4 — é uma espiral equiangular; para uma justificação informal deste facto, veja o apoio *online* a este artigo.

Exemplo 2. A espiral equiangular por iteração.

Vamos mostrar os primeiros passos do início deste tipo de construção, que resultarão na fig. 5, e depois desenvolver as construções seguintes no *website* de apoio a este artigo. O início consiste na sequência seguinte:

- construção de um segmento *01* e da semi-recta *01*
- escolha de três parâmetros que serão os três ângulos $\alpha=.5rad$, $\beta=1.5rad$ e $-\alpha$ — no caso da fig. 5;
- duas rotações da semirecta *01* com centro em *0* e ângulos α e $-\alpha$, obtendo as semi-rectas s_1 e s_2;
- uma rotação da semi-recta *01* com centro em *1* e ângulo β obtendo a semi-recta s_3;
- e finalmente uma rotação de s_3 com centro em *1* e ângulo $-\alpha$ obtendo a semi-recta s_4.

Designamos por *A* e *B* as intersecções respectivamente de s_4 com s_1 e de s_4 com s_2.

Note-se que desta forma temos tudo preparado para repetir (*iterate*) este processo, obtendo novos pontos A_1, A_2 e A_3 (e também B_1,B_2 e B_3). A_1 obtém-se a partir de *0* e *A* precisamente como *A* se obtivera a partir de *0* e *1* (e analogamente para os pontos *B*).

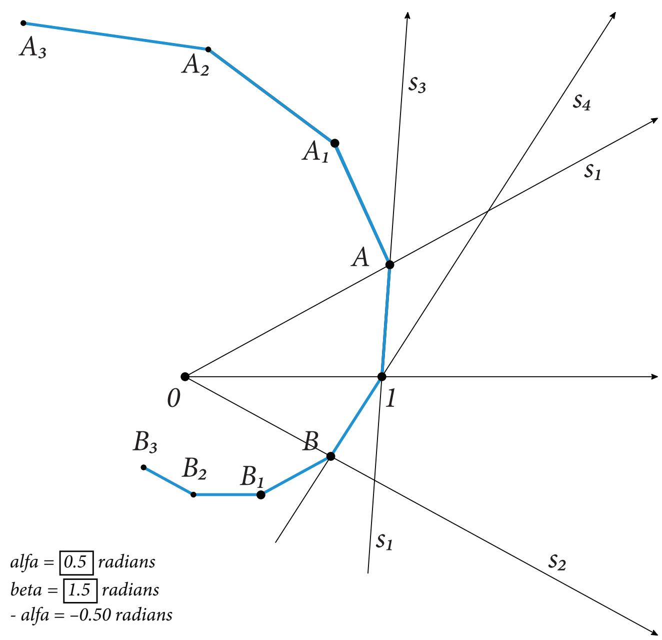

Figura 5

Detalhes deste procedimento encontram-se no *site* de apoio a este artigo.

O que obtivemos até agora? Não uma curva "contínua", mas uma figura formada por pontos cada vez mais numerosos, os quais, unidos por segmentos, sugerem a curva final. Observe que a fig. 5 depende, de modo decisivo, dos parâmetros angulares α *e* β. O parâmetro β é o *ângulo de referência* da espiral equiangular que estamos a construir. Intuitivamente, sendo *A* o "ponto seguinte" a *1*, a recta *1A* é a "tangente" à espiral no ponto *1*!

Quanto a α, sendo o ângulo entre as semi-rectas *o1* e s_1, define o afastamento entre "pontos consecutivos da figura (curva)". Ao repetirmos este processo usando valores de α menores, as figuras obtidas por iteração aproximam-se da espiral. O processo completo está descrito nas páginas e vídeos do *website* de apoio a estes artigos.

Notas

1. Não deixe de ler – ou reler – a *nota prévia* com que iniciamos o artigo sobre a espiral de Arquimedes (E&M nº 141), pois são dadas aí indicações importantes comuns a todos os artigos sobre curvas que publicaremos. Note-se que o parâmetro *t*, no caso da espiral equiangular, será um ponto da recta $\overleftrightarrow{01}$ e não da semi-recta $\overrightarrow{01}$.
2. Consulte páginas *on line* de apoio a este artigo no endereço *www.eduardoveloso.pt.*
3. H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry* (pág. 126; John Wiley & Sons, Inc. segunda edição).
4. Veja o magnífico texto de Jaime Carvalho e Silva *O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva – uma primeira abordagem* em https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/sebsilva.html